Varianta 9

Subiectul I.

a) $\left|(2+3i)^2\right| = 13$.

b) $4\sqrt{2}$.

c) Ecuația tangentei este: $x - y - 1 = 0$

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD} = \frac{1}{6}$.

f) $a = -9$ şi $b = 46$

Subiectul II.

1.

a) 16.

b) Probabilitatea căutată este $\frac{1}{5}$.

c) $g(2) + g(1) + g(0) = 0$.

d) $x = 1$.

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$.

2.

a) $f'(x) = \frac{2 + x^2}{1 + x^2}$.

b) Asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f este dreapta $y = x + \frac{\pi}{2}$.

c) $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$.

e) $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{\pi + 2 - 2\ln 2}{4}$.

Subiectul III.

a) Calcul direct.

b) Calcul direct

c) De exemplu, $P = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in H$, $Q = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \in H$ şi $P + Q = B \notin H$.

d) Dacă $U=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}\in H$ este o matrice inversabilă, atunci $\det(U)=\hat{1}$.

$\det(U)=\hat{1} \Leftrightarrow \hat{a}\hat{d}-\hat{b}\hat{c}=\hat{1} \Leftrightarrow \begin{cases}\hat{a}\hat{d}=\hat{1}\\ \hat{b}\hat{c}=\hat{0}\end{cases}$ sau $\begin{cases}\hat{a}\hat{d}=\hat{0}\\ \hat{b}\hat{c}=\hat{1}\end{cases}$, de unde obținem că $U=I_2$.

e) Numărul elementelor mulțimii $M_2(\mathbf{Z}_2)$ este egal cu 16.

f) Obținem: $H=\left\{O_2, I_2, \begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{1}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}\right\}$,

deci H are 8 elemente.

g) Dacă $U=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}\in H$, putem scrie:

$$U=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{a}-\hat{c} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{b}\\ \hat{0} & \hat{b}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{d}-\hat{b}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{c} & \hat{0}\\ \hat{c} & \hat{0}\end{pmatrix},$$

iar $\begin{pmatrix}\hat{a}-\hat{c} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}\in\left\{O_2, \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}\right\}\subset H$, $\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{b}\\ \hat{0} & \hat{b}\end{pmatrix}\in\left\{O_2, \begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\right\}\subset H$

$\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{d}-\hat{b}\end{pmatrix}\in\left\{O_2, \begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\right\}\subset H$, $\begin{pmatrix}\hat{c} & \hat{0}\\ \hat{c} & \hat{0}\end{pmatrix}\in\left\{O_2, \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}\right\}\subset H$.

Subiectul IV.

a) $g'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, pentru $x\in[0,\infty)$.

b) Considerăm $x\in[0,\infty)$.

Pentru orice $k\in\mathbf{N}^*$, notăm $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)=a_k$

Se foloseşte primul principiu de inducţie şi faptul că

$\forall\, m\in\mathbf{N}^*$, $g^{(m+1)}(x)=\left(g^{(m)}(x)\right)'$.

c) Pentru $k=n+1$, din **b)** obținem $g^{(n+1)}(t)=a_{n+1}(1+t)^{\frac{1}{2}-n-1}\overset{ip}{=}f_0(t)$, $\forall t\in[0,\infty)$.

d) Din **c)** obținem $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)\,dt=\int_0^x g^{(n+1)}(t)\,dt=g^{(n)}(t)\Big|_0^x=g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0)$,

pentru orice $x\in[0,\infty)$.

e) Considerăm $x\in[0,\infty)$.

Din **d)** deducem că $\forall\, t\in[0,\infty)$, $f_1(t)=g^{(n)}(t)-g^{(n)}(0)$ şi integrând succesiv, după un număr finit de paşi obţinem:

$$\forall\, t\in[0,\infty),\quad f_0(t)=g^{(n+1)}(t)$$
$$f_1(t)=g^{(n)}(t)-g^{(n)}(0)$$
$$f_2(t)=g^{(n-1)}(t)-g^{(n-1)}(0)-g^{(n)}(0)\cdot t$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n(t)=g'(t)-g'(0)-g^{(2)}(0)\cdot\frac{t}{1!}-g^{(3)}(0)\cdot\frac{t^2}{2!}-\dots-g^{(n)}(0)\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

şi integrând pe $[0,x]$ egalitatea precedentă, rezultă

$$f_{n+1}(x)=g(x)-g(0)-g^{(1)}(0)\cdot\frac{x}{1!}-g^{(2)}(0)\cdot\frac{x^2}{2!}-\dots-g^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{n!}.$$

f) Se demonstrează prin inducţie.

g) Dacă $x=0$, atunci $g(0)=\lim\limits_{n\to\infty}g(0)$, deci este adevărată concluzia.

Considerăm $x\in(0,1]$.

Din **e)** obţinem $g(0)+g^{(1)}(0)\cdot\frac{x}{1!}+g^{(2)}(0)\cdot\frac{x^2}{2!}+\dots+g^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{n!}=g(x)-f_{n+1}(x)$ (1)

Din **f)**, avem $|f_{n+1}(x)|\le\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot|a_{n+1}|\le\frac{1}{(n+1)!}\cdot|a_{n+1}|=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}$ (2)

Notăm $b_n=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+2)}$.

Se arată că $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ şi din (2) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f_{n+1}(x)=0$, pentru orice $x\in(0,1]$,

iar din (1) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(g(0)+g^{(1)}(0)\cdot\frac{x}{1!}+g^{(2)}(0)\cdot\frac{x^2}{2!}+\dots+g^{(n)}(0)\cdot\frac{x^n}{n!}\right)=g(x)$.